CONCOURS 1991

Régime Technologique

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

Coefficient : 4

Exercice 1 : (11 points)

A) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1°)a) Exprimer AV_1 pour $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ en fonction de V_1.

b) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

2°) Soit la matrice P , $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Prouver que P est inversible et calculer la matrice P^{-1}.

b) Calculer la matrice $P^{-1}AP$.

3°) On donne les matrices :

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad J = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer JK et KJ.

Calculer J^n et K^n pour tout entier naturel n.
Ecrire B à l'aide de J et de K ; en déduire B^n pour tout entier naturel n.

b) Prouver, par récurrence, que :

$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = PB^nP^{-1}$.

c) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$A^n = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5^n - (6n-8)2^n & 5^n + (3n-1)2^n & 5^n - (\frac{3}{2}n + 1)2^n \\ 4\times5^n - (6n+4)2^n & 4\times5^n + (3n+5)2^n & 4\cdot5^n - (\frac{3}{2}n + 4)2^n \\ 4\times5^n + (12n-4)2^n & 4\times5^n - (6n+4)2^n & 4\times5^n + (3n + 5)2^n \end{pmatrix}$$

B) Un jeton est placé au hasard, c'est-à-dire avec équiprobabilité, sur l'une des trois cases d'une planchette numérotées de gauche à droite 1, 2, 3.
Le déplacement du jeton sur la planchette est régi par l'expérience suivante :

- On tire une boule d'une urne contenant quatre boules blanches et une boule noire.
  . Si la boule tirée est blanche, on déplace le jeton de deux cases vers la droite, ou, si ce déplacement est impossible, on laisse le jeton là où il se trouve.
  . Si la boule tirée est noire, on déplace le jeton d'une case vers la gauche, ou, si ce déplacement est impossible, on laisse le jeton là où il se trouve.
- On remet dans l'urne la boule tirée.

Tournez la page S.V.P.

Pour n entier naturel non nul, on note X_n la variable aléatoire indiquant le numéro de la case où se trouve le jeton après le n-ième tirage dans l'urne. X_0 désigne la variable aléatoire indiquant le numéro de la case où se trouve le jeton avant le premier tirage dans l'urne.

1°) Préciser la loi de X_0 ; calculer $E(X_0)$ et $V(X_0)$.

2°) Pour n entier naturel, on note :

$a_n = P(X_n = 1)$; $b_n = P(X_n = 2)$; $c_n = P(X_n = 3)$; $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

a) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \frac{1}{5} A U_n$ où A est la matrice définie dans la partie A).

b) Exprimer U_n en fonction de A, n et U_0.

c) En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n et trouver les limites a, b et c des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3°) Déterminer la probabilité qu'à l'issue des n premiers tirages dans l'urne le jeton ait été déplacé une fois et une seule.

Exercice 2 : (9 points)

A) On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 10\, e^{-0,1x} \ln(1 + e^{0,1x})$

$g(x) = \frac{10}{e} \ln(1 + e^{0,1x})$.

1°) Etude de f :

a) Calculer f'(x) pour $x \in \mathbb{R}$.

b) Prouver que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leqslant \ln(1 + t) - \frac{t}{1+t}.$$

En déduire le signe de f'(x).

c) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2°) Etude de g :

a) Déterminer le sens de variation de g.

b) Etudier les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

3°) On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de f et g.

a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

b) Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(0 ; \vec{i}, \vec{j})$.

unités : 0,5 cm sur $(0 ; \vec{i})$

1 cm sur $(0 ; \vec{j})$;

(on placera les points de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$ d'abscisses 5k pour k entier variant de -5 à 5).

A SUIVRE

B) Sur $\mathbb{R}^+$, f est la fonction de demande d'un bien sur un marché (f(x) est le prix qu'accepte de payer un consommateur en fonction des quantités x demandées).
Sur $\mathbb{R}^+$, g est la fonction d'offre de ce même bien (g(x) est le prix proposé par un producteur en fonction des quantités x offertes).
Le marché est dit en équilibre lorsque l'offre égale la demande.

1°) Déterminer la quantité x_o et le prix p correspondant à l'équilibre du marché.

2°) Le prix du bien étant fixé à p, le consommateur achète x_o unités au prix p ; la différence entre ce qu'il était prêt à payer et ce qu'il paie réellement est représentée par l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}_f$, les droites d'équations $x = 0$, $x = x_o$ et $y = p$. Cette aire est appelée surplus du consommateur SC.

a) A l'aide du changement de variable $t = e^{0,1x}$, établir que :

$$SC = 100\int_1^e \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt - 10f(10).$$

b) Prouver qu'il existe a et b réels tels que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{1}{t(1+t)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{1+t}$$

c) Donner la valeur exacte de SC et sa valeur arrondie à 10^{-2} près au plus proche.

3°) On définit de façon analogue la notion de surplus du producteur SP, aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}_g$, les droites d'équations $x = 0$, $x = x_o$ et $y = p$.

a) Soit n un entier naturel non nul ; prouver que pour tout entier k compris entre 1 et n :

$$\frac{10}{n}g\left(\frac{10(k-1)}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{10(k-1)}{n}}^{\frac{10k}{n}} g(x)dx \leqslant \frac{10}{n}g\left(\frac{10k}{n}\right)$$

b) On pose $u_n = \frac{10}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{10k}{n}\right)$.

Prouver que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad u_n + \frac{10}{n}(g(0) - g(10)) \leqslant \int_0^{10} g(x)dx \leqslant u_n.$$

En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 0 \leqslant SP - (10g(10) - u_n) \leqslant \frac{100}{ne}\ln\frac{1+e}{2}.$$

Utiliser ce résultat pour trouver une valeur approchée de SP à une unité près.

c) Comment suffit-il de choisir n pour avoir

$$0 \leqslant SP - (10g(10) - u_n) < 0,01.$$

Ecrire un programme en PASCAL permettant de calculer

$10g(10) - \frac{10}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{10k}{n}\right)$ pour une valeur de n donnée par l'utilisateur du programme.

FIN